数理解析研究所講究録
124巻 1971年 20-36

locally C^*-algebra について

九大 理 井上 淳

§0 序

R. Arens と E. Michael は topological algebra の1種である locally m-convex algebra を紹介し研究した。ここで、これをもとにして、C^*-condition をもった complete locally m-convex $*$-algebra (我々は locally C^*-algebra とよぶ) を紹介し、研究することによって、C^*-algebra を1般化する。

§1 において準備をし、§2 において commutative locally C^*-algebra の functional representation をし、§3 において、C^*-algebra が Hilbert space 上の operator algebra の uniformly closed $*$-subalgebra と isomorphic であるという事実の拡張を考える。即ち locally

C^*-algebra はある operator algebra の closed $*$-subalgebra と isomorphic であることを示す。

§1. 準備

定義1.1. 次の条件をみたす seminorms の族 $\{p_j\}_{j\in J}$ が存在するとき、$*$-algebra A は (complete) locally m-convex $*$-algebra ($LMC*$-alg.) とよばれる。

(1) $\{p_j\}_{j\in J}$ が A 上の Hausdorff (complete) locally convex topology を定義する.

(2) $p_j(xy) \leqq p_j(x)p_j(y)$ for $\forall x, y\in A$, $\forall j\in J$

(3) $p_j(x^*) = p_j(x)$ for $\forall x\in A$, $\forall j\in J$

定義1.2. 特に上の seminorms の族 $\{p_j\}$ が

(4) $p_j(x^*x) = p_j(x)^2$ for $\forall x\in A$, $\forall j\in J$

をみたすようにとれるとき complete $LMC*$-alg. A を locally C^*-algebra とよぶことにする。そして $\{p_j\}_{j\in J}$ を C^*-seminorms の族とよぶ。

次に locally C^*-algebra の例をあげよう。

(1) C^*-algebra は locally C^*-algebra.

(2) C^*-algebras の cartesian product は locally C^*-algebra である.

(3) Tを completely regular topological space とする．そして$\{D_i\}$を「$\bigcup_i D_i = T$, D_iのあらゆる有限個の和はあるD_jに含まれる」をみたすTの compact subsetsの族とする。ここで$A = C(T)$（T上の連続関数の全体）にD_i上での uniform convergence の topology を入れるとC(T)は locally C^*-algebraになる」

我々は今，あらゆる locally C^*-algebra がある意味で C^*-algebras によって生成されることを示す。この§では AをC^*-seminormsの族$\{P_j\}_{j\in J}$をもつ locally C^*-alg. とする。

任意の$j\in J$に対して，

$$U_j = \{x \in A \;;\; P_j(x) \leq 1\}$$
$$N_j = \{x \in A \;;\; P_j(x) = 0\}$$
$$A_j = A/N_j$$
π_j ; AからA_jへの natural homomorphism
$$x_j = \pi_j(x)$$

とおくと，A_jは norm $\|x_j\| = P_j(x)$をもった normed $*$-algebra になり$\|x_j^* x_j\| = \|x_j\|^2$をみたすことは明らかである。よって$A_j$のこの norm による完備化$\overline{A_j}$は C^*-algebraになる。次に index set Jは次のように順序づけられる。

$$i < j \rightleftarrows U_j \subset U_i$$
$$\rightleftarrows p_i(x) \leq p_j(x) \quad \text{for } {}^\forall x \in A$$

$i<j$のとき

$$\pi_{ij} \ ; \ x_j \in A_j \longrightarrow x_i \in A_i$$

はA_jからA_i上への norm-decreasing homomorphism よってπ_{ij}は$\overline{A}_j$から$\overline{A}_i$の dense $*$-subalgebra 上への norm-decreasing homomorphism $\overline{\pi}_{ij}$へ拡張できる。いま$\overline{\pi}_{ij}$に関する$\overline{A}_j$の projective limit を$\mathcal{LP}(A)$とする. すなわち

$$\mathcal{LP}(A) = \{ x \in \prod_j \overline{A}_j \ ; \ \overline{\pi}_{ij}(\overline{\pi}_j(x)) = \overline{\pi}_i(x) \ \text{whenever } j > i \}$$

$$\left(\begin{array}{lll} \text{但し} & \prod_j \overline{A}_j & ; \ \{\overline{A}_j\} \text{の cartesian product} \\ & \overline{\pi}_j & ; \ \prod_j \overline{A}_j \text{から} \overline{A}_j \text{への projection} \end{array} \right)$$

を考えよう。

定理 1.1.

(1) Aは$\mathcal{LP}(A)$と isomorphic である

(2) 任意のjに対して$x(j) \in \overline{A}_j$. かつ$j>i$のときいつでも$\overline{\pi}_{ij}(x(j)) = x(i)$ならば, すべての$j$に対して$x_j = x(j)$をみたす$x \in A$が存在する.

(証明) $\mathcal{LP}(A)$が$\prod_j \overline{A}_j$の$*$-subalgebra であり. $\{\mathcal{LP}(A) \cap \overline{\pi}_j^{-1}(U_j)\}$は$\mathcal{LP}(A)$に対する base である

ことは明らか。いま canonical map.

$$\phi\ ;\ A \longrightarrow \prod_j \bar{A}_j \quad (\phi(x)=\{x_j\})$$

を考えるとϕは into isomorphism で$\phi(A)\subset \mathcal{L}\mathcal{P}(A)$をみたす。そして

$$\bar{\pi}_j(\phi(A))=\pi_j(A)=A_j\subset\bar{\pi}_j(\mathcal{L}\mathcal{P}(A))\subset\bar{A}_j$$

従って、すべてのjに対して$\bar{\pi}_j(\phi(A))$は$\bar{\pi}_j(\mathcal{L}\mathcal{P}(A))$で dense. よって$\phi(A)$は$\mathcal{L}\mathcal{P}(A)$で dense である。1方Aは complete. よって$\phi(A)$も complete.

ゆえに $\phi(A)=\mathcal{L}\mathcal{P}(A)$.

定理1.2.

(1) x ; quasi-regular in A

$\Leftrightarrow x_j$; q. r. in $\bar{A}_j$ for $^\forall j\in J$.

(2) Aが単位元をもつ$\Leftrightarrow$あらゆる$\bar{A}_j$が単位元をもつ

(3) x ; invertible in A

$\Leftrightarrow x_j$; invertible in $\bar{A}_j$ for $^\forall j\in J$.

系1.1.

(1) $\Sigma_A(x)=\bigcup_j \Sigma_{\bar{A}_j}(x_j)$

(2) $\sigma_A(x)=\sup_j \sigma_{\bar{A}_j}(x_j)=\sup_j \sqrt[n]{p_j(x^n)}$

(但し$\Sigma_A(x)$はAでのxの spectrum ただしxがAで invertible でないなら$\{0\}$を加えたもの
$\sigma_A(x)$はxの spectral 半径)

§2. 可換な locally C^*-algebra.

この§をとおしてAを C^*-seminorms の族 $\{p_j\}_{j\in J}$ をもつ可換な locally C^*-algebra, $\mathcal{U}=\{U_j\}_{j\in J}$, $U_j=\{x\in A\,;\, p_j(x)\leq 1\}$ とする。

記号 A^* ; A の conjugate space

U_j° : U_j の polar

$S(A)=\{f\in A^*\,;\, f(xy)=f(x)f(y) \text{ for } {}^\forall x,y\in A\}$

$S(A,j)=S(A)\cap U_j^\circ$

$S(\bar{A}_j)=\{f_j\in \bar{A}_j^*\,;\, f_j(xy)=f_j(x)f_j(y) \text{ for } {}^\forall x,y\in \bar{A}_j\}$

これらに weak topology $\sigma(A^*,A)$ による relative topology を導入する.

補題

(1) $S(A)=\bigcup_j S(A,j)$

(2) すべての $j\in J$ に対して $S(A,j)$ は $S(\bar{A}_j)$ と homeomorphic

(3) すべての $j\in J$ に対して $S(A,j)$ は compact.

(証明) (1): $\bigcup_j S(A,j)\subset S(A)$ は明らか. 逆に $f\in S(A)$ とする。f は連続であるからある $j\in J$ と constant γ が存在して $|f(x)|\leq \gamma p_j(x)$ をみたす。ここで $f_j(x_j)=f(x)$ とおくと f_j は $f_j(x_jy_j)=f_j(x_j)f_j(y_j)$, $|f_j(x_j)|=|f(x)|\leq \gamma p_j(x)=\gamma\|x_j\|$. 従って f_j は A_j 上の連続関数である。それゆえ, f_j は $\bar{A}_j$ 上の連続~~拡張~~関数へ拡張で

きる。それをまたf_jによってかくことにする。すると$f_j\in S(\overline{A_j})$であることは明らか、従って$\|f_j\|\leq 1$ゆえに

$$\sup_{x\in U_j}|f(x)|=\sup_{x\in U_j}|f_j(x_j)|\leq\|f_j\|\leq 1$$

よって　$f\in U_j^0$　以上から　$f\in S(A,j)$

(2) mapping ; $f\in S(A,j)\longrightarrow f_j\in S(\overline{A_j})$（但し$f_j$は(1)でつくった函数）は$S(A,j)$から$S(\overline{A_j})$上へのbijectionであることは明らかにわかる。さらにmap. $f\longrightarrow f_j$がopen mappingであることはf_jの定義からすぐわかる。map $f\longrightarrow f_j$の連続性を示そう。f_jの任意のw^*−近傍のsubbase $N(f_j;\xi_j;\varepsilon)=\{F\in S(\overline{A_j});|F(\xi_j)-f_j(\xi_j)|<\varepsilon\}$（$\xi_j\in\overline{A_j}$, $0<\varepsilon<1$）をとり出し固定する。A_jは$\overline{A_j}$でdenseであるから$\|\xi_j-x_j\|<\frac{\varepsilon}{4}$をみたす$x\in A$が存在する。よって$f$の$w^*$−近傍$N(f;x;\frac{\varepsilon}{2})$をとると$f\longrightarrow f_j$によって$N(f;x;\frac{\varepsilon}{2})$は$N(f_j;\xi_j;\varepsilon)$の中に写される。事実　$g\in N(f;x;\frac{\varepsilon}{2})$に対して

$$\begin{aligned}
&|f_j(\xi_j)-g_j(\xi_j)|\\
&\quad\leq|f(x)-g(x)|+|f_j(\xi_j-x_j)|+|g_j(\xi_j-x_j)|\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{2}+\|f_j\|\,\|\xi_j-x_j\|+\|g_j\|\,\|\xi_j-x_j\|\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon
\end{aligned}$$

(3) (2)によって$S(A,j)$と$S(\overline{A_j})$はhomeomorphic　$S(\overline{A_j})$はcompact. ゆえに$S(A,j)$もcompact.

7.

zero function で0になる $S(A)$ 上の複素数値連続関数の全体を $C_0(S(A))$ とし，$C_0(S(A))$ に次の演算と semi-norm を導入する．$X, Y \in C_0(S(A))$, $f \in S(A)$ に対して

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$$

$$(\lambda X)(f) = \lambda X(f)$$

$$(XY)(f) = X(f)Y(f)$$

$$(X^*)(f) = \overline{X(f)}$$

$$q_j(X) = \sup_{f \in S(A,j)} |X(f)|$$

すると $C_0(S(A))$ は locally C^*-algebra になる．

定理　可換な locally C^*-algebra A は locally C^*-algebra $C_0(S(A))$ と isomorphic である．

(証明) 任意の $j \in J$ に対して $\overline{A_j}$ は可換な C^*-algebra であるから，任意の $x(j) \in \overline{A_j}$ と $f_j \in S(\overline{A_j})$ に対して $[\pi_j(x(j))](f_j) = f_j(x(j))$ なる $\overline{A_j}$ から $C_0(S(\overline{A_j}))$ 上への isometric isomorphism π_j が存在する．$f = S(A) = \bigcup_j S(A,j)$ ならある $j \in J$ があって $f \in S(A,j)$．ここで任意の $x \in A$ に対して，$S(A)$ 上の関数 $\pi(x)$ を次のように定義する

$$[\pi(x)](f) = [\pi_j(x_j)](f_j) = f_j(x_j) = f(x).$$

上の $\pi(x)$ は $S(A)$ 上の連続関数．よって $\pi(x) \in C_0(S(A))$.

また $\pi_j(x_j)$ が $*$-homo. であるから, $\pi(x)$ も $*$-homo.

さらに, $$\rho_j(\pi(x)) = \sup_{f\in S(A,j)} |[\pi(x)](f)| = \sup_{f\in S(A,j)} |f(x)|$$

1方 $$p_j(x) = \|x_j\| = \|\pi_j(x_j)\| = \sup_{f_j\in S(\bar{A}_j)} |[\pi_j(x_j)](f_j)| = \sup_{f_j\in S(\bar{A}_j)} |f_j(x_j)|$$

map. $f\in S(A,j) \longrightarrow f_j\in S(\bar{A}_j)$ は bijection であるから $\rho_j(\pi(x)) = p_j(x)$. よって $x\in A\to\pi(x)\in C_0(S(A))$ は 1:1 である. map. $x\longrightarrow\pi(x)$ が onto であることを示せばこの定理は成り立つ。任意の $X\in C_0(S(A))$ に対して

$$X(j)(f_j) = X(f) \text{ for } {}^\forall f_j\in S(\bar{A}_j)$$

とおくと $S(\bar{A}_j)$ と $S(A,j)$ は homeomorphic であるから $X(j)\in C_0(S(\bar{A}_j))$. $\bar{A}_j$ と $C_0(S(\bar{A}_j))$ は isometric isomorphism であるから $\pi_j(x(j)) = X(j)$ となる $x(j)\in\bar{A}_j$ が存在する。$i<j$ のとき $\pi_{ij}(x(j)) = x(i)$ であることは $[\pi_{ij}(X(j))](f_i) = X(f) = [X(i)](f_i)$ であることによりすぐわかる。Theorem 1.1. により, $x\in A$ が存在して, 任意の $j\in J$ に対して $x_j = x(j)$ が成り立つ。よって $\pi_j(x_j) = X(j)$. 従って, 任意の $f\in S(A)$ に対して $[\pi(x)](f) = [\pi_j(x_j)](f_j) = X(j)(f_j) = X(f)$

よって $\pi(x) = X$. 従って $x\longrightarrow\pi(x)$ は onto.

系. $A = C_0(S(A))$ の位相 τ は次の2つの位相と1致する.

(1) $S(A)$の equicontinuous subsets 上の uniform convergence の位相.

(2) $S(A)$の compact, equicontinuous subsets 上の uniform convergence の位相.

(証明) Eを$S(A)$の equicontinuous subset とする.
そのとき, Aの0の近傍Uが存在して $E \subset U^\circ \cap S(A)$となる.
U°は位相$\sigma(A^*, A)$をもったA^*で compact である.
$S(A) = \bigcap_{x,y\in A} \{f \in A^* ; f(xy) - f(x)f(y) = 0\}$で,
$x \longrightarrow f(x)$, $xy \longrightarrow f(xy)$が連続であるから. $S(A)$はA^*の closed subsets である。よって $U^\circ \cap S(A)$は$S(A)$の compact subset である。だから(1),(2)の位相は一致する.その位相をτ_0とする.今任意の$X \in C_0(S(A))$に対して $q_j(X) = \sup_{f\in S(A,j)} |X(f)|$. $S(A,j) = S(A) \cap U_j^\circ$は$S(A)$の equicontinuous subset である.
よって $\tau < \tau_0$ 1方Eが$S(A)$の equicontinuous subset とするると$E \subset U^\circ$をみたすAの0の近傍Uが存在する.よって $E^\circ \supset U$ それゆえ $\tau_0 < \tau$.

§3. locally C^*-algebraの representation theory

この§で locally Hilbert space $\mathfrak{H}$ を定義し $\mathfrak{H}$ 上のある continuous linear operatorsの algebra $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ を考える. そのとき $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は locally C^*-algebraであり また任意の locally C^*-algebra は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の closed $*$-subalgebraと isomorphicであることを示す。

$\Lambda=(\alpha)$ が directed ordered set で. 任意の $\alpha\in\Lambda$ に対して内積 $(\ /\ )_\alpha$ をもった Hilbert space $\mathfrak{H}_\alpha$ が与えられているとする。そして Hilbert spacesの族 $\{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が「$\alpha<\beta$ のときいつでも $\mathfrak{H}_\alpha\subset\mathfrak{H}_\beta$ かつ $\mathfrak{H}_\alpha$ 上で $(\ /\ )_\alpha = (\ /\ )_\beta$」を満足するものとする。そのとき vector space $\mathfrak{H}=\bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$ を考え $\mathfrak{H}$ に次のような位相を導入する。

定義3.1. X ; closed subset in $\mathfrak{H}$

$\rightleftarrows$ $\exists\alpha\in\Lambda$; "$X=\mathfrak{H}$" or "X closed subset in $\mathfrak{H}_\alpha$"

$\mathcal{F}$ を $\mathfrak{H}$ のすべての closed subsetsの族とする。

補題 $\mathcal{F}$ によって $\mathfrak{H}$ は topological spaceで T_1-spaceになる.

(証明)

(1) $\mathfrak{H}\in\mathcal{F}$

(2) $X_1,\dots,X_n\in\mathcal{F}$ のとき $\bigcup_{i=1}^{n} X_i\in\mathcal{F}$ を示す。$X_i=\mathfrak{H}$ なる $1\le i\le n$ があるときは $\bigcup_{i=1}^{n} X_i=\mathfrak{H}\in\mathcal{F}$. すべての

$1 \leq i \leq n$に対して$X_i \subsetneqq \mathfrak{H}$のとき$\mathfrak{H}$のclosed subsetsの定義により任意の$i$に対して$\alpha_i \in \Lambda$が存在して$X_i$は$\mathfrak{H}_{\alpha_i}$でclosedである。$\Lambda$はdirected setであるから、ある$\alpha \in \Lambda$が存在して$\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{H}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{H}_\alpha$かつ$(\ /\ )_{\alpha_i} = (\ /\ )_\alpha$ $(i=1,\cdots,n)$からX_iは$\mathfrak{H}_\alpha$のclosed subsetである。よって$\bigcup_{i=1}^{n} X_i$は$\mathfrak{H}_\alpha$のclosed subset. 従って$\bigcup_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{F}$.

(3) $(X_\lambda)_\lambda \subset \mathcal{F}$なら$\bigcap_\lambda X_\lambda \in \mathcal{F}$を示す。任意の$\lambda$に対して$X_\lambda = \mathfrak{H}$のときは$\bigcap_\lambda X_\lambda = \mathfrak{H} \in \mathcal{F}$. よって$X_{\lambda_0} \subsetneqq \mathfrak{H}$なる$\lambda_0 \in (\lambda)$のときを考えればよい。$X = \bigcap_\lambda X_\lambda \subset X_{\lambda_0}$として$X_{\lambda_0} \in \mathcal{F}$かつ$X_{\lambda_0} \neq \mathfrak{H}$だからある$\alpha_0 \in \Lambda$が存在して$X_{\lambda_0}$は$\mathfrak{H}_{\alpha_0}$のclosed subsetである。$X = \bigcap_\lambda X_\lambda = \bigcap_\lambda X_\lambda \cap \mathfrak{H}_{\alpha_0}$, $\alpha < \beta$なら$(\ /\ )_\alpha = (\ /\ )_\beta$によって$X_\lambda \cap \mathfrak{H}_{\alpha_0}$は$\mathfrak{H}_{\alpha_0}$のclosed subsetである。よって$X \in \mathcal{F}$. 以上によって$\mathfrak{H}$はtopological spaceであり$\mathfrak{H}$が$T_1$-spaceであることは明らか。

定義3.2. 上の$\mathfrak{H}$をlocally Hilbert spaceとよぶことにする。

Tをlocally Hilbert space $\mathfrak{H} = \bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$上のlinear operatorとする。そして$T_\alpha = T/\mathfrak{H}_\alpha$とおく。もし$\alpha < \beta$なら$\mathfrak{H}_\alpha$は$\mathfrak{H}_\beta$のclosed subspaceであるから$\mathfrak{H}_\beta$から$\mathfrak{H}_\alpha$上へのprojection $P_{\alpha\beta}$を定義することができる。

ここで $\alpha<\beta$ ならいつでも $T_\beta P_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}T_\beta$ を満足する $\mathfrak{H}$ 上の linear operator T を考えよう。このような T に対して次のことが成り立つ。

補題 3.2.

T ; continuous linear operator on $\mathfrak{H}$

$\Leftrightarrow T_\alpha$; bounded linear operator on $\mathfrak{H}_\alpha$ for $\forall\alpha\in\Lambda$.

(証明) $\Rightarrow$; $0\in U_\alpha$ を $\mathfrak{H}_\alpha$ の open subset とする。$U=U_\alpha\cup(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\alpha)$ は $\mathfrak{H}$ の 0 の開近傍. T が連続であるから ある $\beta\in\Lambda$ と $\mathfrak{H}_\beta$ の 0 の開近傍 V_β が存在して、$TV\subset U$, $V=V_\beta\cup(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\beta)$. $V_\beta=\{\xi\in\mathfrak{H}_\beta ; (\xi/\xi)_\beta<\delta\}$ と考えてよい。Λ は directed であるから $\alpha,\beta<\gamma$ なる $\gamma\in\Lambda$ が存在する. ここで $V_\gamma=\{\xi\in\mathfrak{H}_\gamma ; (\xi/\xi)_\gamma<\delta\}$ とおく. $V_\gamma\cap\mathfrak{H}_\beta=V_\beta$ から $V=V_\gamma\cup(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\beta)$ そして $\mathfrak{H}$ の 0 の近傍 $V'=V_\gamma\cup(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\gamma)$ を考えよう. 明らかに $V'\subset V$ よって $TV'\subset U$ ここで $V_\alpha=V_\gamma\cap\mathfrak{H}_\alpha=\{\xi\in\mathfrak{H}_\alpha ; (\xi/\xi)_\alpha<\delta\}$ は $\mathfrak{H}_\alpha$ の 0 の近傍である. そして $T_\alpha V_\alpha\subset U_\alpha$ であることがわかる。

事実, $\forall\xi\in V_\alpha=V_\gamma\cap\mathfrak{H}_\alpha$ に対して, $T_\alpha\xi=T\xi\in T(V_\gamma\cup(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\gamma))\subset U$, 1方 $T_\alpha\xi\in\mathfrak{H}_\alpha$. よって $T_\alpha\xi\in U_\alpha$ それゆえ T_α は $\mathfrak{H}_\alpha$ 上で連続.

$\Leftarrow$; $\bar{U}$ を $\mathfrak{H}$ の 0 の閉近傍とする. そのときある $\alpha\in\Lambda$ と
$\mathfrak{H}_\alpha$ の閉近傍 U_α が存在して $\bar{U} = U_\alpha \cup (\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\alpha)$ とかける.
T_α は $\mathfrak{H}_\alpha$ で連続であるから $T_\alpha V_\alpha \subset U_\alpha$ なる $\mathfrak{H}_\alpha$ の 0 の
閉近傍 V_β が存在する. そしてここで $V = V_\alpha \cup (\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\alpha)$ と
おくとき V は $\mathfrak{H}$ の 0 の近傍である. このとき $TV\subset \bar{U}$ で
あることを示す. 事実 $\xi\in V_\alpha$ なら $T\xi = T_\alpha\xi \in U_\alpha\subset\bar{U}$
$\xi\in\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\alpha$ なら $T_\beta P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}T_\beta$ $(\alpha<\beta)$ から $T\xi\in$
$\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_\alpha \subset U$.

定義3.3. $\alpha<\beta$ ならいつでも $T_\beta P_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}T_\beta$ をみたす
$\mathfrak{H}$ 上の continuous linear operators の全体を
$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ とかくことにする

定理3.1. $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は locally C^*-algebra である.

(証明). $T\in\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $\alpha\in\Lambda$ に対して seminorm
$p_\alpha(T)=\|T_\alpha\| = \sup_{\substack{\xi\in\mathfrak{H}_\alpha \\ \|\xi\|\le 1}}\|T_\alpha\xi\|$ を導入する。この
semi-norms の族 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ で $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の topology
を定義する. いま $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ に involution を導入しよう.
$T\in\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, そのとき任意の $\alpha\in\Lambda$ に対して $T_\alpha\in B(\mathfrak{H}_\alpha)$.
よって $T_\alpha^*\in B(\mathfrak{H}_\alpha)$、$\alpha<\beta$ のとき $P_{\alpha\beta}T_\beta = T_\beta P_{\alpha\beta}$
から $T_\beta^* P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}T_\beta^*$ は明らか よって $T_\beta^*\mathfrak{H}_\alpha\subset\mathfrak{H}_\alpha$.
$\xi,\zeta\in\mathfrak{H}_\alpha$ に対して

$$(T_\beta^*\xi\,|\,\zeta)_\beta = (T_\beta^*\xi\,|\,\zeta)_\alpha$$

$$(T_\beta^* \xi / \zeta)_\beta = (\xi / T_\beta \zeta)_\beta = (\xi / T_\alpha \zeta)_\alpha$$
$$= (T_\alpha^* \xi / \zeta)_\alpha .$$

従って $T_\beta^* \xi = T_\alpha^* \xi$ for $^\forall \xi \in \mathfrak{H}_\alpha$. 以上によって $\xi \in \mathfrak{H}$ なら ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\xi \in \mathfrak{H}_\alpha$. ここで T^* を "$T^* \xi = T_\alpha^* \xi$" と定義する。この定義は well-defind かつ $P_{\alpha\beta} T_\beta^* = T_\beta^* P_{\alpha\beta}$、$T_\beta^* / \mathfrak{H}_\alpha = T_\alpha^*$ から $T^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

そして T^* は involution in $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ であることは明らか、 任意の α に対して、

$$p_\alpha (T_1 T_2) \leq \| (T_1 T_2)_\alpha \| = \| (T_1)_\alpha (T_2)_\alpha \|$$
$$\leq \| (T_1)_\alpha \| \cdot \| (T_2)_\alpha \| = p_\alpha (T_1)\, p_\alpha (T_2)$$

$$p_\alpha (T^*) = \| (T^*)_\alpha \| = \| T_\alpha^* \| = \| T_\alpha \|$$
$$= p_\alpha (T)$$

$$p_\alpha (T^* T) = \| (T^* T)_\alpha \| = \| T_\alpha^* T_\alpha \| = \| T_\alpha \|^2$$
$$= p_\alpha (T)^2$$

$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の完備性は明らか. 以上から $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ は locally C^*-algebra である.

定理3.2.

A ; locally C^*-algebra

$\Rightarrow$ $^\exists$ locally Hilbert space $\mathfrak{H}$

; A は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の closed $*$-subalgebra と isomorphic

(証明). AをC^*-seminormの族$\{p_j\}_{j\in J}$をもったlocally C^*-algebraとする. 任意の$j\in J$に対して, A_jはC^*-algebraであるから, あるHilbert space H_jとA_jから$B(H_j)$ (H_j上のbounded linear opsの全体)の中へのisometric isomorphism π_jが存在する. いま $\mathfrak{H}_j = \bigoplus_{k\le j} H_k$, 任意の$x\in A$に対して, $\overline{\pi}_j(x) = \bigoplus_{k\le j} \pi_k(x_k)$ とおく. そのとき.

$$\begin{aligned}\|\overline{\pi}_j(x)\| &= \sup_{k\le j} \|\pi_k(x_k)\| \\ &= \sup_{k\le j} \|x_k\| = \|x_j\| \\ &= p_j(x)\end{aligned}$$

それゆえ $\overline{\pi}_j(x) \in B(\mathfrak{H}_j)$

$i<j$のとき$\mathfrak{H}_i$と$\mathfrak{H}_i\oplus 0 \subset \mathfrak{H}_j$と同一視して考えると, $\mathfrak{H}_i$は$\mathfrak{H}_j$のclosed subspaceと考えてよい. そのときlocally Hilbert space $\mathfrak{H} = \bigcup_j \mathfrak{H}_j$をつくることができる. $\xi = \bigoplus_{k\le j} \xi_k \in \mathfrak{H}_j$のとき

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_j(x)P_{ij}\xi &= \overline{\pi}_j(x)\left(\left(\bigoplus_{k\le i}\xi_k\right)\oplus 0\right) \\ &= \left(\bigoplus_{k\le i}\pi_k(x_k)\right)\left(\bigoplus_{k\le i}\xi_k\right) \\ &= \bigoplus_{k\le i}\pi_k(x_k)\xi_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{ij}\overline{\pi}_j(x)\xi &= P_{ij}\left(\bigoplus_{k\le j}\pi_k(x_k)\xi_k\right) \\ &= \bigoplus_{k\le i}\pi_k(x_k)\xi_k\end{aligned}$$

それゆえ $\overline{\pi}_j(x)P_{ij} = P_{ij}\overline{\pi}_j(x)$

そして $\overline{\pi}_j(x)/\mathfrak{H}_i = \overline{\pi}_i(x)$ は明らか. $\xi \in \mathfrak{H}$ なら $\xi \in \mathfrak{H}_j$ なる $j \in J$ が存在するから、ここで $\pi(x)$ を "$\pi(x)\xi = \overline{\pi}_j(x)\xi$" と定義する. そのとき $\pi(x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. 任意の $j \in J$ に対して $\overline{\pi}_j(x)$ は $*$-homo. そして $q_j(\pi(x)) = \|\overline{\pi}_j(x)\| = p_j(x)$ だから π は A から $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の中への isomorphism である.